

清 华 大 学

计算固体力学大作业 2

题目：各向异性非线性随动硬化
弹塑性本构模型的 UMAT 程序开发

小组成员：金邓格 嵇长秋 王紫蘅

2021 年 6 月

目录

第 1 章 绪言.....	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 研究现状.....	2
1.3 本文主要工作.....	3
第 2 章 各向异性非线性随动硬化弹塑性本构模型.....	5
2.1 基本假设.....	5
2.2 Hill48 屈服准则及其参数确定.....	5
2.3 AF 非线性硬化模型及参数.....	6
2.4 非线性硬化本构关系的建立.....	7
第 3 章 非线性随动硬化本构模型的数值实现.....	9
3.1 应力更新算法及流程.....	9
第 4 章 ABAQUS 计算模型的建立.....	14
4.1 几何模型及单元划分.....	14
4.2 材料参数.....	14
4.3 边界条件及载荷.....	15
4.4 分析步设置.....	15
第 5 章 计算模型验证与结果分析.....	16
5.1 模型验证与硬化行为分析.....	16
5.2 变形过程分析.....	16
5.3 硬化参数影响分析.....	17
5.4 材料取向的影响.....	18
5.5 不同材料的屈服面演化.....	19
5.6 复杂工况模型验证与分析.....	20
第 6 章 全文总结与展望.....	23
参考文献.....	24

第 1 章 绪言

1.1 研究背景

板料成形技术是先进制造技术的重要组成部分，具有加工成形简单、生产效率和利用率高优点，在汽车、船舶、航空航天等领域得到了广泛的应用^[1]（如图 1(a)(b)(c)）。近年来，环境污染、能源危机和资源枯竭等问题愈发严重，在节能减排和降低成本的需求下，板料成形零件向采用新材料(高强板，碳纤维复合材料等)、复杂曲面零件、薄壁零件等方面发展已经成为各个领域的发展趋势。

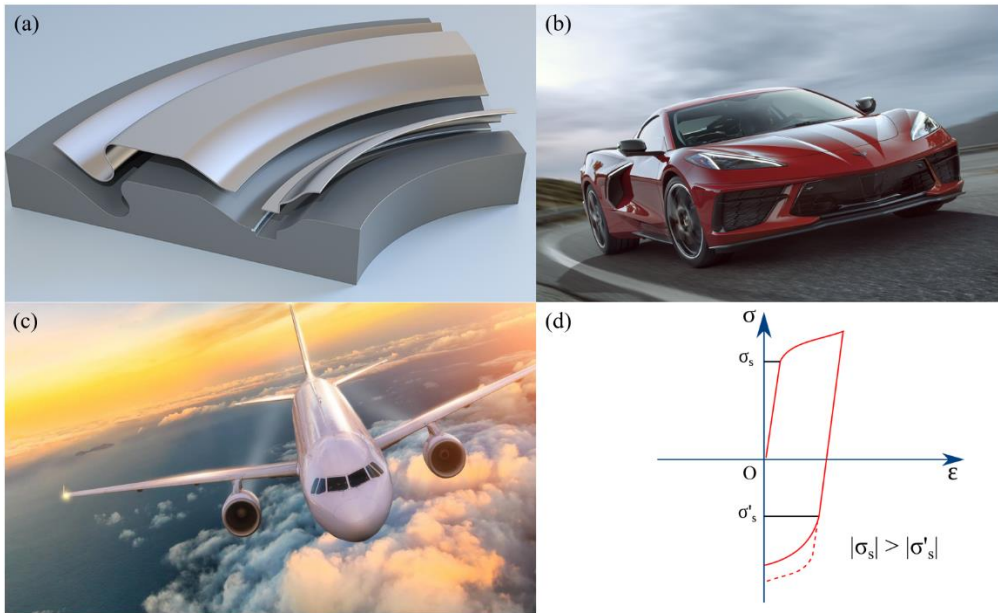


图 1 (a) 板料成形技术在 (b) 汽车 (c) 航空航天领域中的应用；(d) Bauschinger 效应

随着有限元数值模拟技术的发展，对板料成形过程的数值分析结果越来越精确，而数值模拟技术不仅能模拟板料复杂的变形过程，还能预测板料成形中的缺陷，为零件造型可行性分析和冲压模具设计提供了可靠的依据。

在板料成形的数值模拟中，描述板料应力应变关系的本构模型是理论基础和计算核心。只有合适的本构模型才能保证数值分析的可靠性以及提高计算结果的准确度。一些复杂的曲面零件在成形过程中，零件不同部位的成形条件和变形程度存在差异，板料经历拉伸后压缩等反复加载行为会产生 Bauschinger 效应（如图 1 (d)），同时材料性能的方向性增强。此时，各向同性理论已不再适用。由是，描述板料力学性能的本构模型应该能够反映出板料复杂加载状态下的宏观力学特性，如，各向异性、Bauschinger 效应和循环特性等。

综上所述，亟待发展能够适应这些力学特性的本构模型。

1.2 研究现状

关于金属材料的弹塑性本构模型，主要包含了三个部分：屈服准则、硬化模型和流动法则。在塑性力学领域，国内外的学者们提出了众多的本构模型及改进模型。如果已知材料的初始屈服函数，那么按照材料硬化模型和Drucker假设就可以推导出对应的本构关系。因此，研究材料发生塑性变形时的屈服行为和硬化规律是建立材料本构模型的关键问题。

(1) 屈服准则

屈服准则是判定材料中某点的应力分量满足一定关系后产生塑性变形的依据。板料成形过程中经历的反复加载等行为使得材料性能具有明显的各向异性特点，所以服从各向同性假设的屈服准则(如米赛斯屈服准则)不再适用于板料的变形分析。为此，各国学者们研究并提出了许多各向异性屈服准则，其中的 Hill 系列和 Barlat 系列屈服准则较为人们所熟知。

1948 年，Hill^[2]在米赛斯屈服准则基础上，将板料的各向异性引入屈服函数中，提出了 Hill1948 各向异性屈服准则(以下简称 Hill48 屈服准则)。Woodthorpe 和 Pearce^[3]研究发现，Hill48 屈服准则不能准确描述 $r < 1$ 的材料(如铝合金)的屈服行为。针对 $r < 1$ 的材料，Hi11^[4]在 1979 年给出了另一个屈服准则，只适用于各向异性主轴和应力主轴重合的材料，限制了屈服准则的应用范围。Hi1190^[5]屈服准则的材料参数除了厚向异性系数外，还引入了材料在不同方向上的屈服应力值。之后，Hill 又提出了一些屈服准则。

1989 年，Barlat 和 Lian^[6]等提出了一个屈服准则，适用于平面应力条件，能够描述板料变形时的面内各向异性。随后又相继提出了 Barlat91^[7]屈服准则、Barlat2000^[8]屈服准则和 Barlat2004 屈服准则等一系列屈服准则。其中的 Barlat91 屈服准则适于解决三维问题，并且具有普遍性；Barlat2000 屈服准则具有简单的函数表达式，因此在数值模拟中得到广泛应用。Barlat 之后给出的屈服准则表达式复杂、参数较多而且需要进行许多试验求解参数，反倒应用性较差。

对于屈服准则的研究，目前主要集中在反映材料的各向异性以及准确描述流动应力的问题上。总之，任何屈服准则都不能适用全部材料，需要对材料性能进行研究和必要的验证来确定合适的屈服准则。

(2) 硬化模型

硬化模型描述了材料成形过程中屈服面形状及位置变化的规律。目前，描述板料发生塑性变形时硬化规律的模型可以分为各向同性硬化模型、随动硬化模型和混合硬化模型等。

Lud-wick(1909)，Holloman(1944)及 Voce(1948)等先后提出了等向硬化模型，模型的表达式可写为

$$F(\sigma) - \sigma_{iso}^m = 0 \quad (1-1)$$

式中， F 为屈服函数， σ 为柯西应力， $\bar{\sigma}_{iso}^m$ 为等效应力。

之后，Prager^[9]给出了一个线性随动硬化模型，定义塑性变形过程中材料的屈服面大小不变而曲面中心沿应力的法线方向移动。Ziegler^[10]改进了 Prager 的硬化模型，重新定义屈服面移动的方向，改为沿曲面中心和当前应力点的连线方向。然而，Ziegler 硬化模型仍不能准确反映复杂加载情况下材料的应力应变关系。为了描述材料塑性变形过程中的非线性硬化现象，Armstrong 和 Frederick^[11]在模型中加入一个动态恢复项，提出了非线性随动硬化模型（简称 A-F 模型），基本表达式如下

$$F(\alpha - \sigma) - \bar{\sigma} = 0 \quad (1-2)$$

式中， α 为背应力。

Krzysztof^[12]等通过引入微极性效应拓展了 A-F 模型。为了反映材料的快速硬化现象，Chaboche^[13]在 A-F 模型基础上提出了改进形式。Chun^[14]研究并修改了 Chaboche 的叠加型强化模型，提出了有效的各向异性非线性随动强化模型，被收入到 ABAQUS 有限元分析软件中。Chung^[15]等基于等效塑性功原理及非二次各向异性屈服函数，建立了修正的 Chaboche 型非线性随动强化模型。除此之外，基于 A-F 模型，还有一些学者提出了一些混合硬化模型^[16,17]。

(3) 流动法则

Drucker 提出，若材料满足最大塑性功假设，那么材料是稳定的且加载函数是外凸的。将塑性应变增量和屈服条件联系起来建立的关联塑性流动法则为

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1-3)$$

式中， F 为加载函数， $d\varepsilon_{ij}^p$ 为塑性应变增量， $d\lambda$ 为瞬时比例系数。关联流动法则决定了塑性应变增量的方向，可以根据塑性增量理论的本构关系确定应力状态。

借鉴以上研究基础，本文将基于 HILL48 屈服准则和 A-F 随动硬化模型建立一种各向异性非线性随动硬化弹塑性本构关系。

1.3 本文主要工作

本文的主要工作是针对板料在经历反复加载后会产生各向异性屈服行为、加工硬化现象及循环加载时的 Bauschinger 效应的问题，基于 Hill48 屈服准则和 A-F 随动硬化模型，建立了一种各向异性非线性随动硬化弹塑性本构模型，采用完全隐式的向后欧拉应力更新算法给出应力的迭代公式，并开发了 ABAQUS 子程序，对几个基于此情景的算例进行了模拟。首先介绍了研究该问题背后的意义，即现有简单的模型不适用于板料成形时复杂的问题，需要建立合适的本构模型以及数值算法对其进行分析；简要综述了现有国外学者对这个问题里的弹塑性本构理论研究，即屈服准则和硬化模型；基于 Hill48 屈服准则和 A-F 随动硬化模型

建立了一种各向异性非线性随动硬化弹塑性本构模型；基于理论采用完全隐式的向后欧拉应力更新算法给出应力的迭代公式，开发了 ABAQUS 的 UMAT 子程序；最后对几个该情境下的算例进行模拟，验证该本构模型及算法的有效性。

第 2 章 各向异性非线性随动硬化弹塑性本构模型

针对上述的问题以及已有的理论, 本章将结合 Hill48 屈服准则和 A-F 硬化模型建立能够反映板料的各向异性和 Bauschinger 效应的弹塑性本构。

2.1 基本假设

针对弹塑性材料的本构模型进行研究时, 由于材料的变形过程是非常复杂的, 因此需要提出一些假设:

- (1)连续性假设: 认为物体内部是由密实的连续介质构成, 并且发生弹塑性变形时仍然保持连续性;
- (2)小变形假设: 通常认为材料发生小变形时, 其应变和位移的导数之间呈线性几何关系。但当材料产生大变形的情况必须考虑几何关系中的二阶或高阶非线性项;
- (3)均匀性假设: 假定材料内各质点的物理性质处处相同, 且与取样位置无关。
- (4)Drucker 假设和 Ilyushin 假设^[18,19]。

2.2 Hill48 屈服准则及其参数确定

Hill48 屈服准则考虑了材料的各向异性特征, 认为板料各方向应力对塑性屈服的贡献不同, 可以用于板料成形过程中的塑性描述, 屈服函数表达式如下

$$\phi(\sigma_{ij}) = A_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - 2K_H^2 = 0 \quad (2-1)$$

式中, A_{ijkl} 为一个对称张量, 有 15 个互相独立的参数, σ_{ij} 、 σ_{kl} 为应力张量, K_H 为等效应力。

对板料成形问题进行分析时, 经常将其简化成平面应力问题, 因此 Hill48 屈服函数需要改为平面应力状态的形式, 应力张量中仅剩三个应力分量(σ_{11} 、 σ_{22} 、 σ_{12}), 表达式如下

$$f = \sqrt{\frac{1}{2}\sigma_{ij}K_{ijkl}\sigma_{kl}} \quad (2-2)$$

式中 K_{ijkl} 为一个四阶张量, 用来表征塑性变形时的各向异性, 可以用一个对称矩阵 \mathbf{P} 表示

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -P_{12} & 0 \\ -P_{12} & P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & P_{66} \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

矩阵 \mathbf{P} 中的各个项的计算式为

$$P_{12} = \frac{r_0}{1 + r_0} \quad (2-4)$$

$$P_{22} = \frac{r_0(1 + r_{90})}{r_{90}(1 + r_0)} \quad (2-5)$$

$$P_{66} = \frac{(r_0 + r_{90})(1 + 2r_{45})}{r_{90}(1 + r_0)} \quad (2-6)$$

2.3 AF 非线性硬化模型及参数

1966 年, Armstrong-Frederick 提出的非线性随动硬化模型为材料循环塑性行为的研究做出了巨大贡献。A-F 模型包含一个线性强化项和一个动态恢复项, 演化方程可以表示为

$$d\alpha_{ij} = \frac{2}{3}C d\varepsilon_{ij}^p - \gamma\alpha_{ij} \bar{d\varepsilon}^p \quad (2-7)$$

式中 C 、 γ 为材料常数, α_{ij} 为背应力分量, $d\varepsilon_{ij}^p$ 为塑性应变增量, $\bar{d\varepsilon}^p$ 为等效塑性应变增量。下面给出背应力方程中材料常数的求取方法。由公式(2-7)可知, 当材料采用单向拉伸的加载方式时, $\bar{d\varepsilon}^p = d\varepsilon^p$, 因此可以得到

$$d\alpha_1 = \frac{2}{3}C d\varepsilon_1^p - \gamma\alpha_1 d\varepsilon_1^p \quad (2-8)$$

通过移项可以写成

$$\frac{d\alpha_1}{\frac{2}{3}C - \gamma\alpha_1} = d\varepsilon_1^p \quad (2-9)$$

通过对公式(2-9)中的一阶微分方程进行积分, 可以得到

$$\alpha_1 = \frac{2C}{3\gamma} + \left(\alpha_1^0 - \frac{2C}{3\gamma} \right) e^{-\gamma(\varepsilon_1^p - \varepsilon_{1,0}^p)} \quad (2-10)$$

式中 α_1^0 为背应力初始值, $\varepsilon_{1,0}^p$ 为塑性应变的初始值。

由初始条件可知, $\alpha_1^0 = \varepsilon_{1,0}^p = 0$ 。将初始值代入公式(2-10)中, 可以得到背应力表达式为

$$\alpha_1 = \frac{2C}{3\gamma} \left(1 - e^{-\gamma\varepsilon_1^p} \right) \quad (2-11)$$

根据背应力表达式(2-11), 通过对板料试样单向拉伸实验获得的塑性应变及真实应力的实验数据进行非线性拟合, 就可以得到参数 C 、 γ 。

2.4 非线性硬化本构关系的建立

采用随动硬化模型描述材料的硬化行为时，材料屈服函数表达式中的应力张量 σ_{ij} 将变为应力张量 σ_{ij} 和背应力张量 α_{ij} 的差值。由公式(2-2)可知，采用随动硬化模型时 Hill48 屈服函数的表达式将写为

$$F = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) K_{ijkl} (\sigma_{kl} - \alpha_{kl})} \quad (2-12)$$

由关联流动理论可以得到塑性应变增量为

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2-13)$$

根据等效塑性功原理得到以下等式

$$dw^p = (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) d\varepsilon_{ij}^p = \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}^p \quad (2-14)$$

式中 dw^p 为塑性功增量。

可以利用齐次函数的欧拉定理根据屈服函数 $F(\sigma_{ij} - \alpha_{ij})$ 得到

$$(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \bar{\sigma} \quad (2-15)$$

将公式(2-13)代入到公式(2-14)中，同时结合公式(2-15)，得到以下关系式

$$d\bar{\varepsilon}^p = d\lambda \quad (2-16)$$

对于弹塑性变形过程，材料的总应变增量可以分为弹性增量和塑性增量两部分：

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (2-17)$$

式中 $d\varepsilon_{ij}$ 为总应变增量， $d\varepsilon_{ij}^e$ 为弹性应变增量， $d\varepsilon_{ij}^p$ 为塑性应变增量。

在整个弹塑性变形过程中，仍然认为材料应变中的弹性变形部分服从广义 Hooke 定理

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}^e = D_{ijkl}^e (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) \quad (2-18)$$

式中 D_{ijkl}^e 为弹性模量，其为一个四阶张量。

对公式(2-12)进行微分可以得到

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} (d\sigma_{ij} - d\alpha_{ij}) = 0 \quad (2-19)$$

上式被称为一致性条件。

将公式(2-7)、(2-13)、(2-16)和(2-18)结合计算后，将运算结果代入到公式(2-19)中，可以

得到 $d\lambda$ 的表达式

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{2}{3} C \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} - \gamma \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \alpha_{kl}} \quad (2-20)$$

将公式(2-20)代入公式(2-13)中, 可以得到塑性应变增量为

$$d\varepsilon_{kl}^e = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{2}{3} C \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} - \gamma \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \alpha_{kl}} \quad (2-21)$$

将上式代入到公式(2-18)中, 可以得到服从 Hill48 屈服准则的非线性随动硬化材料模型的应力应变增量表达式

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl} \quad (2-22)$$

式中 D_{ijkl}^e 为弹塑性模量, 也称为一致切线模量。

D_{ijkl}^e 的数学表达式为:

$$D_{ijkl}^{ep} = D_{ijkl}^e - \frac{D_{ijkl}^e \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} D_{rskl}^e \frac{\partial F}{\partial \sigma_{rs}}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{2}{3} C \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} - \gamma \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \alpha_{kl}} \quad (2-23)$$

由此推得其本构。

第 3 章 非线性随动硬化本构模型的数值实现

本章将根据建立的非线性随动硬化本构模型，选择合理有效的应力更新算法，基于 ABAQUS 子程序接口编写用户材料子程序，完成本构模型的数值实现。

3.1 应力更新算法及流程

精确有效的应力更新算法能够让有限元数值模拟计算收敛速度快且精度高。基于增量理论的数值模拟方法中常用的应力更新算法包括：显式积分算法、完全隐式回映算法和半隐式回映算法^[20-22]。为了避免显式积分算法中计算结果偏离屈服平面的情况，这里选择了完全隐式的向后欧拉应力更新算法。大概步骤为：计算初始加载条件下的弹性预测步，当预测应力偏离了后继屈服面，需计算一个塑性调整步，进行迭代，直到将预测应力校正到更新后的屈服面上。求解过程如下：

(1) 假设当前增量步是纯弹性加载，则可得到

$$\sigma_{n+1}^T = \sigma_n + D^e \Delta \varepsilon_{n+1} \quad (3-1)$$

其中的上标“T”代表试应力状态，变量的下标代表增量步状态。由于假设当前增量步的应变状态为弹性变形，故当前增量步的塑性应变与上一增量步结束时的塑性应变相同，同理可以得到等效塑性应变和背应力

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(T)} = \bar{\varepsilon}_n^p, \alpha_{n+1}^T = \alpha_n \quad (3-2)$$

(2) 判断屈服：将弹性试应力代入公式(3-3)，若满足条件，则当前增量步为弹性变形，将变量值结果传递给下一个增量步并且退出迭代循环，否则通过步骤(3)进行塑性修正。

$$F(\sigma_{n+1}^T, \alpha_{n+1}^T) - \sigma_Y < Tol^e \quad (3-3)$$

式中 Tol^e 为一个容差值，一般取 1×10^{-9} ， σ_Y 为当前屈服应力值。

(3) 塑性修正：如果上述条件得不到满足，则认为材料在当前增量步 $n+1$ 发生了塑性变形，需要对预测试应力进行塑性修正，将弹性试应力 σ_{n+1}^T 作为塑性修正的初始值。接下来计算当前增量步产生的塑性应变增量 $\Delta \varepsilon^p$ ，对应力结果进行修正使其满足平衡条件，返回到更新后的屈服面上。最终得到的当前增量步 $n+1$ 的应力、背应力以及其它本构变量应该满足一致性条件。采用 Newton—Raphson 迭代方法求解屈服条件的非线性方程，为了迭代循环，定义 \bar{r} 为变量理论值和算法计算结果之间的差值

$$\bar{r}_\sigma = \sigma - \sigma_n - D^e (\Delta \varepsilon_{n+1} - \Delta \varepsilon^p) \quad (3-4)$$

$$\bar{r}_\alpha = \alpha - \alpha_n - \frac{2}{3} C \Delta \varepsilon^p + \gamma \alpha \Delta \varepsilon \quad (3-5)$$

$$\bar{r}_f = F(\sigma, \alpha) - \sigma^0 \quad (3-6)$$

式中 σ^0 为初始屈服应力值。

对公式(3-4)到(3-6)进行泰勒展开得

$$\bar{r}_\sigma = \bar{r}_\sigma + \dot{\sigma} + \lambda D^e a + \Delta \lambda D^e \frac{\partial a}{\partial \sigma} \dot{\sigma} - \Delta \lambda D^e \frac{\partial a}{\partial \sigma} \dot{\alpha} \quad (3-7)$$

$$\bar{r}_\alpha = \bar{r}_\alpha + \dot{\alpha} - \lambda \frac{2}{3} C a - \Delta \lambda \frac{2}{3} C \frac{\partial a}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \Delta \lambda \frac{2}{3} C \frac{\partial a}{\partial \sigma} \dot{\alpha} + \Delta \varepsilon^p \gamma \alpha + \Delta \varepsilon^p \gamma \dot{\alpha} \quad (3-8)$$

$$\bar{r}_f = \bar{r}_f + a^T \dot{\sigma} - a^T \dot{\alpha} \quad (3-9)$$

式中, $\dot{\sigma}$ 、 $\dot{\alpha}$ 、 $\Delta \varepsilon^p$ 、 $\dot{\lambda}$ 分别是 σ 、 α 、 $\Delta \varepsilon^p$ 、 λ 的迭代变化量, $a = \partial F / \partial \sigma$ 。

由公式(2-16)可知

$$\Delta \varepsilon^p = \Delta \lambda, \Delta \varepsilon^p = \dot{\lambda} \quad (3-10)$$

令式公式(3-7)~(3-9)的左侧均为 0, 整理可得

$$\dot{\alpha} = -D_1 \bar{r}_\alpha + D_2 \lambda a + D_3 \dot{\sigma} - D_1 \gamma \dot{\alpha} \dot{\lambda} \quad (3-11)$$

$$\dot{\sigma} = -\Theta^{-1} \bar{r} - \Theta^{-1} \Pi \lambda a - \Theta^{-1} \Gamma \dot{\lambda} \quad (3-12)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\bar{r}_f - \tilde{q}}{a^T \Theta^{-1} (\Pi a + \Gamma) + a^T (D_2 a - D_1 \gamma \alpha) - a^T D_3 \Theta^{-1} (\Pi a - \Gamma)} \quad (3-13)$$

式中

$$D_1 = I + \frac{2}{3} C \Delta \lambda \frac{\partial a}{\partial \sigma} + \gamma \Delta \lambda I$$

$$D_2 = D_1 \frac{2}{3} C$$

$$D_3 = D_1 \frac{2}{3} C \Delta \lambda \frac{\partial a}{\partial \sigma}$$

$$\Theta = I + \Delta \lambda D^e \frac{\partial a}{\partial \sigma} - \Delta \lambda D^e \frac{\partial a}{\partial \sigma} D_3$$

$$\Gamma = \Delta \lambda D^e \frac{\partial a}{\partial \sigma} D_1 \gamma \alpha$$

$$\Pi = D^e - \Delta \lambda D^e \frac{\partial a}{\partial \sigma} D_2$$

$$\tilde{q} = a^T \Theta^{-1} \hat{r} + a^T D_1 \bar{r}_\alpha + a^T D_3 \Theta^{-1} \hat{r}$$

$$\hat{r} = \bar{r}_\alpha + \Delta \lambda D^e \frac{\partial a}{\partial \sigma} D_1 \bar{r}_\alpha$$

得到 $\dot{\lambda}$ 后，代入式(24)、(25)计算 $\dot{\alpha}$ 和 $\dot{\sigma}$ ，则本构方程中的变量进行更新

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma + \dot{\sigma} \\ \alpha &= \alpha + \dot{\alpha} \\ \Delta \lambda &= \Delta \lambda + \dot{\lambda} \end{aligned} \quad (3-14)$$

$$\Delta \varepsilon^p = \Delta \lambda$$

将更新后的变量代入一致性条件

$$\Phi = F(\sigma, \alpha) - \sigma^0 < Tol^e \quad (3-15)$$

若不满足上述条件，需要重复上述过程，直到满足条件。

(4) 更新并储存当前增量步的各变量值，计算一致切线模量。采用向后欧拉算法可以写出如下表达式

$$\sigma = \sigma^T - \Delta \lambda D^e a \quad (3-16)$$

$$\alpha = \alpha_b + \frac{2}{3} C \Delta \lambda a - \gamma \alpha \Delta \lambda \quad (3-17)$$

$$\phi = F(\sigma, \alpha) - \sigma^0 = 0 \quad (3-18)$$

对公式(3-16)~(3-18)求偏导数得到

$$\dot{\sigma} = D^e \dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} D^e a + \Delta \lambda D^e \frac{\partial a}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \Delta \lambda D^e \frac{\partial a}{\partial \sigma} \dot{\alpha} \quad (3-19)$$

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \frac{2}{3} C a + \Delta \lambda \frac{2}{3} C \frac{\partial a}{\partial \sigma} \dot{\sigma} - \Delta \lambda \frac{2}{3} C \frac{\partial a}{\partial \sigma} \dot{\alpha} - \dot{\lambda} \gamma \alpha - \Delta \lambda \gamma \dot{\alpha} \quad (3-20)$$

$$\dot{\phi} = a^T \dot{\sigma} - a^T \dot{\alpha} = 0 \quad (3-21)$$

由上可得

$$\dot{\sigma} = R \dot{\varepsilon} - R a \dot{\lambda} - \Lambda \dot{\lambda} \quad (3-22)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{a^T R \dot{\varepsilon} - a^T D_3 \dot{\sigma}}{a^T R a - a^T \Lambda + a^T D_2 a - a^T D_1 \gamma \alpha} \quad (3-23)$$

式中

$$\Lambda = \Sigma^{-1} \Delta \lambda D^e \frac{\partial a}{\partial \sigma} D_2 a - \Sigma^{-1} \Delta \lambda D^e \frac{\partial a}{\partial \sigma} D_1 \gamma \alpha$$

$$\Sigma = I + \Delta \lambda D^e \frac{\partial a}{\partial \sigma} - \Delta \lambda D^e \frac{\partial a}{\partial \sigma} D_3$$

$$R = \Sigma^{-1} D^e$$

将公式(3-23)代回到公式(3-22)中，最终计算得到弹塑性矩阵

$$D^{ep} = \frac{R \Psi + \Lambda a^T R - R a a^T R}{I \Psi + \Lambda a^T D_3 - R a a^T D_3} \quad (3-24)$$

式中 $\Psi = a^T R a - a^T \Lambda + a^T D_2 a - a^T D_1 \gamma \alpha$ 。

需要说明的是， $\dot{\sigma}$ 、 $\dot{\alpha}$ 、 $\dot{\lambda}$ 在步骤(3)和步骤(4)中的表达式不同，前者用于变量的迭代更新，后者用于推算一致切线刚度矩阵。

根据上述流程编制子程序 UMAT，如下图 2 流程图所示：

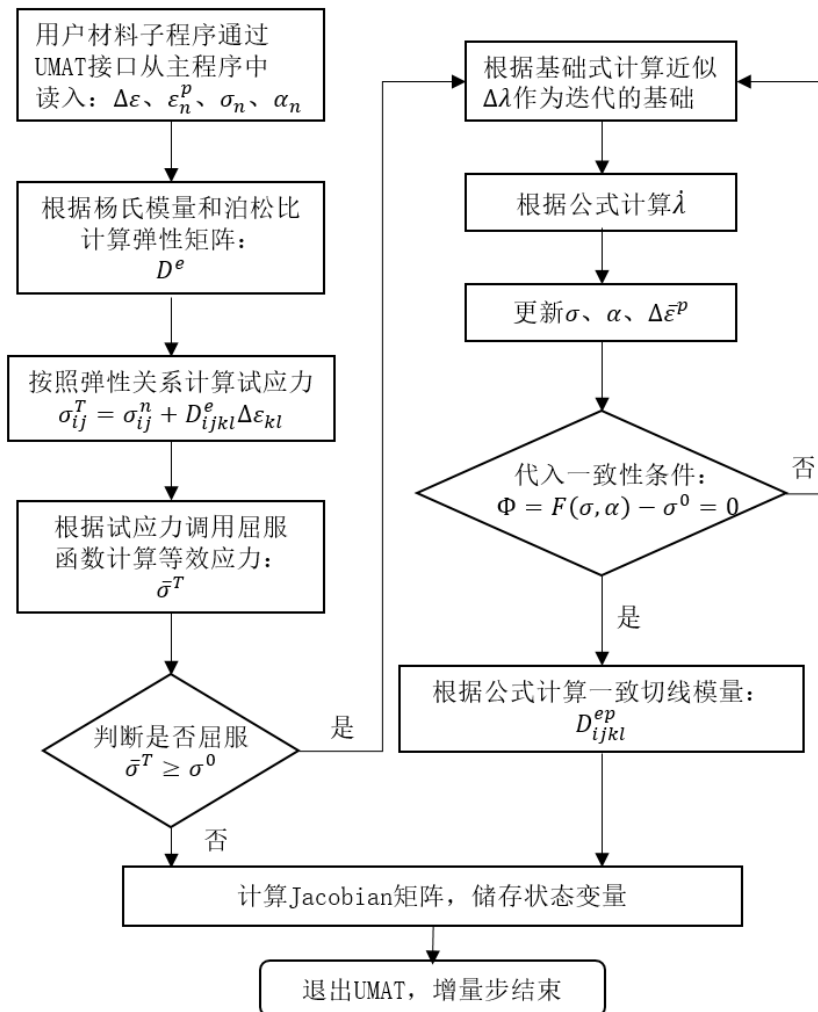


图 2 UMAT 子程序流程图

利用 UMAT 子程序的计算过程中, 弹性应变张量 ε_{ij}^e 、塑性应变张量 ε_{ij}^p 、等效塑性应变 $\Delta \bar{\varepsilon}^p$ 及背应力张量 α_{ij} 等变量的计算结果储存在 STATEV 数组中, 提供给下一个增量步调用。根据本构方程表达式, 其中总共包含 12 个与求解过程相关的变量, 分别为 4 个弹性应变分量、4 个塑性应变分量、1 个等效塑性应变及 3 个背应力分量。

第 4 章 Abaqus 计算模型的建立

本章将建立简单的 Abaqus 计算模型，用于后续计算。

4.1 几何模型及单元划分

建立如图 3 所示的平面应力模型。尺寸为 $100m \times 100m \times 1m$ 。

为简化问题，在开始阶段仅使用一个单元划分模型。单元为平面应力单元，具体类型为 CPS4R 单元。

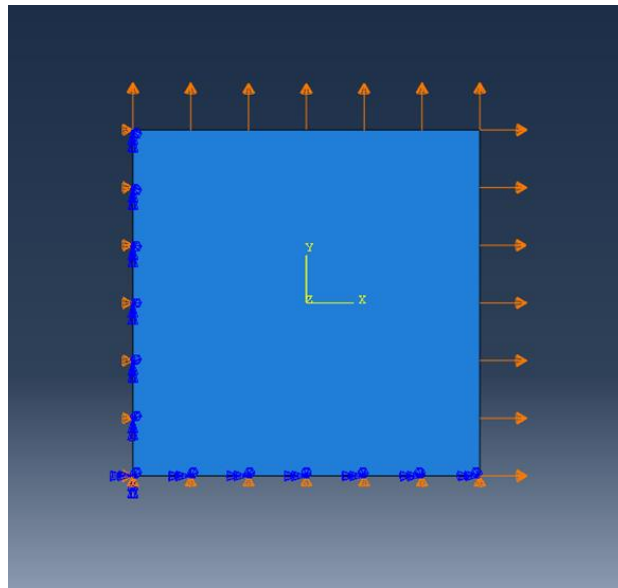


图 3 Abaqus 几何模型

4.2 材料参数

模型使用的材料参数及其数值如表 1 所示。

表 1 材料参数

物理意义	符号	数值
杨氏模量	E	209GPa
泊松比	ν	0.3
初始屈服应力	σ_0	174MPa
各向异性参数	r_0	1.69
各向异性参数	r_{45}	1.95
各向异性参数	r_{90}	1.83
线性强化系数	C	100GPa

动态恢复系数	γ	100
--------	----------	-----

4.3 边界条件及载荷

边界条件及载荷设置如图 3 所示：

在左边界设置对称边界条件，要求变形沿 y 轴对称，即左边界上 $U1=UR2=UR3$ ；

在下边界设置对称边界条件，要求变形沿 x 轴对称，即下边界上 $U2=UR1=UR3$ ；

在右边界设置均布位移加载，方向沿 x 轴正向，大小为 $10m(\varepsilon_{xx} = 0.1)$ ；

在上边界设置均布位移加载，方向沿 y 轴正向，大小为 $10m(\varepsilon_{yy} = 0.1)$ 。

4.4 分析步设置

采用动态隐式分析步进行计算。

第 5 章 计算模型验证与结果分析

本章将验证第四章中建立的 Abaqus 计算模型的正确性，并针对不同的硬化模型和不同的材料取向，对计算结果进行简单分析。

5.1 模型验证与硬化行为分析

第四章中建立的非线性硬化模型可以通过令动态恢复系数 $\gamma = 0$ 退化成线性硬化模型，也可以进一步令线性强化系数 $C = 0$ 从而退化成理想弹塑性模型。

将非线性硬化模型，线性硬化模型，理想弹塑性模型和线弹性模型的计算结果对比如图 4 所示，其中非线性模型采用的硬化参数已在图中标明。

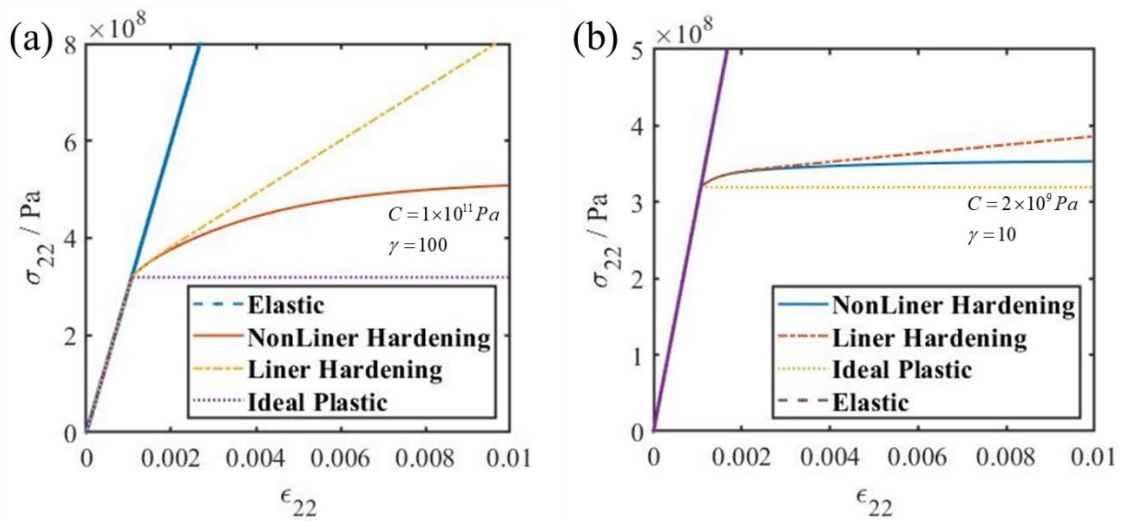


图 4 不同模型计算结果对比

可以看到

- (1) 相同应变下，线性硬化模型和非线性硬化模型的应力结果介于线弹性和理想塑性之间；
- (2) 相对于线性硬化模型，非线性硬化模型的应力应变曲线表现出了明显的非线性；
- (3) 随着变形的增大，非线性硬化模型的应力增加速度逐渐减慢，直到基本达到平稳，此时材料响应接近理想弹塑性模型。

5.2 变形过程分析

下面分析非线性硬化模型的加载变形过程。其变形过程中的弹塑性应变演化及背应力演化如图 5 所示。

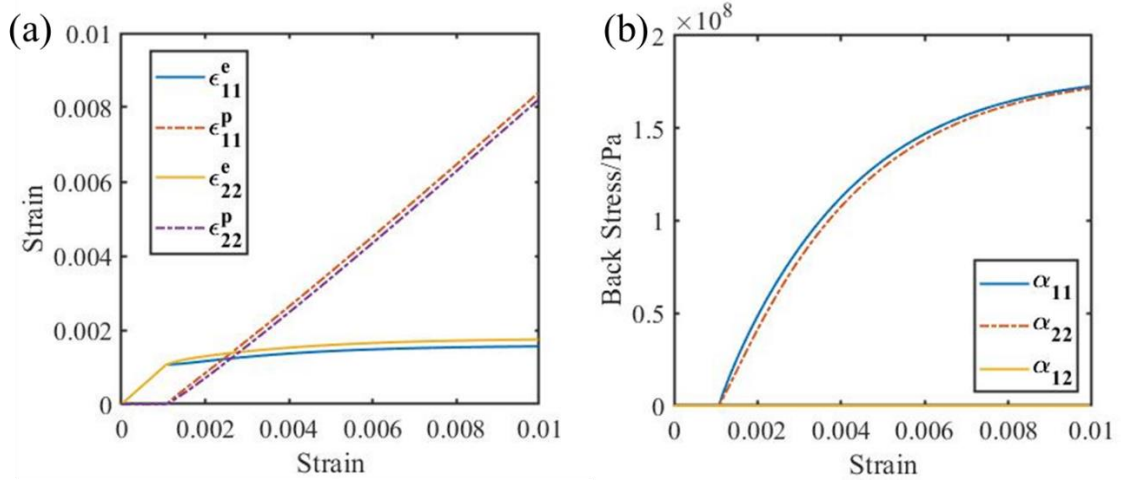


图 5 变形过程的弹塑性应变和背应力演化

可以看到：

在变形开始阶段，只有弹性应变，塑性应变和背应力都为 0；随着变形的进行，塑性变形逐渐占主导，弹性应变的增加变得特别缓慢；

背应力在塑性变形刚刚开始的时候增加很快，到变形后期，背应力逐渐趋于稳定。这是因为背应力的演化公式为

$$d\alpha_{ij} = \frac{2}{3}C d\varepsilon_{ij}^p - \gamma\alpha_{ij}d\varepsilon^p \quad (5-1)$$

在初始塑性变形时，背应力的值很小，动态恢复项的影响很小；随着背应力增大，动态恢复项的影响越来越大；当动态恢复项与线性强化项接近时，背应力的增量趋近于 0，此时背应力区域稳定不再增加。

由一致性条件

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}(d\sigma_{ij} - d\alpha_{ij}) = 0 \quad (5-2)$$

在背应力达到稳定时应力也达到稳定，这就是 5.1 节中非线性硬化模型应力在大变形时达到稳定的原因。

5.3 硬化参数影响分析

下面对于非线性硬化模型，为研究线性强化系数 C 和动态恢复系数 γ 这两个硬化参数的影响，固定其中一个，改变另外一个，观察材料的应力应变响应，结果如图 6 所示，其中固定的参数值已在图中标出。

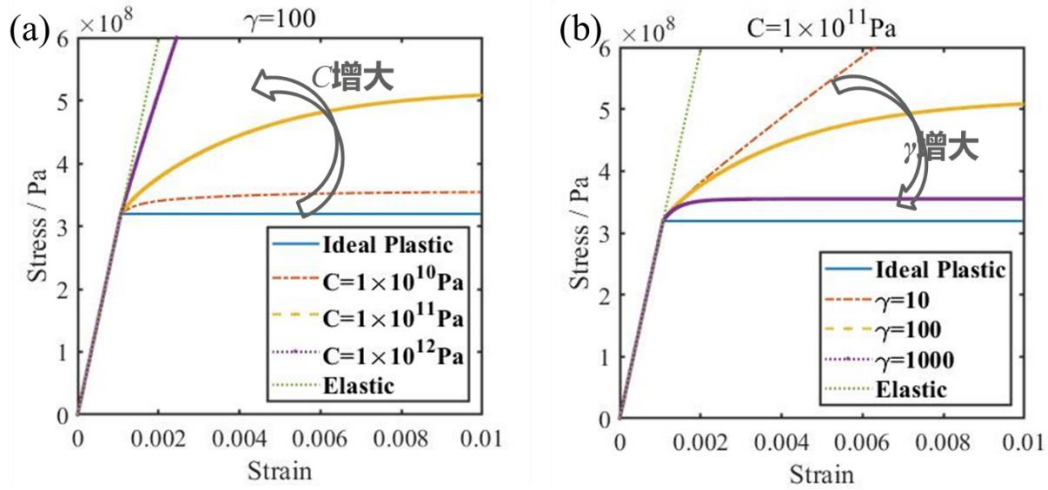


图 6 硬化参数影响研究

可以看到：

在动态恢复系数 γ 固定的情况下，线性强化系数 C 越大，材料表现得越硬，材料响应越接近线弹性；线性强化系数 C 越小，材料响应越接近理想弹塑性。

在线性强化系数 C 固定的情况下，在动态恢复系数 γ 越大，动态回复项的影响越大，材料越接近理想弹塑性，与此同时，应力稳定越早，到达应力稳定值越小。

5.4 材料取向的影响

下面进行各向异性材料与各向同性材料的屈服行为比较。对于本模型，采用的是各向异性屈服准则，

$$\sqrt{(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) K_{ijkl} (\sigma_{kl} - \alpha_{kl})} - \sigma_0 = 0 \quad (5-3)$$

其中

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -P_{12} \\ -P_{12} & P_{22} \\ & & P_{66} \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

从而简化得到

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \alpha_{11} \\ \sigma_{22} - \alpha_{22} \\ \sigma_{12} - \alpha_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -P_{12} \\ -P_{12} & P_{22} \\ & & P_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \alpha_{11} \\ \sigma_{22} - \alpha_{22} \\ \sigma_{12} - \alpha_{12} \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \quad (5-5)$$

对于各项同性材料，采用 Mises 屈服准则，

$$\sqrt{(\sigma'_{ij} - \alpha_{ij})(\sigma'_{ij} - \alpha_{ij})} - \sigma_0 = 0 \quad (5-6)$$

即

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}' - \alpha_{11} \\ \sigma_{22}' - \alpha_{22} \\ \sigma_{12}' - \alpha_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_{11}' - \alpha_{11} \\ \sigma_{22}' - \alpha_{22} \\ \sigma_{12}' - \alpha_{12} \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \quad (5-7)$$

均采用非线性硬化准则，将各项异性和各项同性两种材料的力学响应比较如图 7。

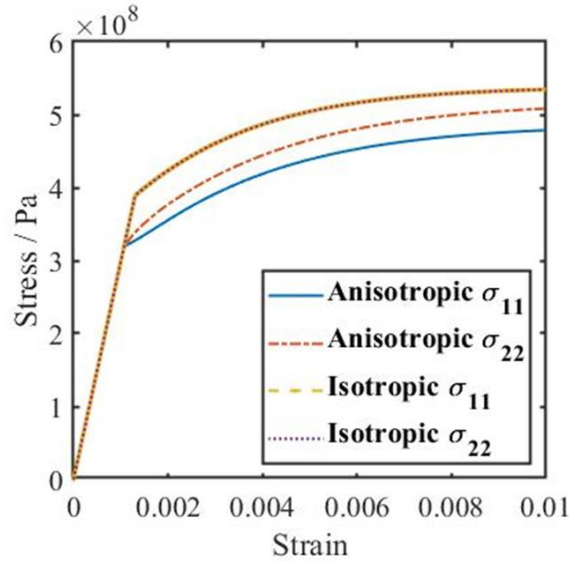


图 7 各向异性材料与各向同性材料的屈服行为比较

可以看到：

在弹性阶段，各向同性材料与各向异性材料的响应是一致的，这是因为屈服函数只体现在塑性段。

在塑性阶段，由于取向矩阵的存在，各向同性材料与各向异性材料的应力不再一致。对于各向异性材料，因为 1 方向和 2 方向的取向因子不同，二者的应力幅值不同；对于各项同性材料，由 Mises 屈服准则，1 方向和 2 方向的地位是相同的，因而在相同的加载下应力幅值相同。

5.5 不同材料的屈服面演化

对于各向异性材料

$$\sqrt{(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) K_{ijkl} (\sigma_{kl} - \alpha_{kl})} - \sigma_0 = 0 \quad (5-8)$$

对于各向同性材料

$$\sqrt{(\sigma_{ij}' - \alpha_{ij})(\sigma_{ij}' - \alpha_{ij})} - \sigma_0 = 0 \quad (5-9)$$

二者均可表达为

$$\sqrt{(\sigma_m - \alpha_m) P_{mn} (\sigma_n - \alpha_n)} - \sigma_0 = 0 \quad (5-10)$$

其中

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -P_{12} \\ -P_{12} & P_{22} \\ & & P_{66} \end{bmatrix} \quad (5-11)$$

对于计算的平面应力问题，屈服条件简化为

$$(\sigma_{11} - \alpha_{11})^2 - 2P_{12}(\sigma_{11} - \alpha_{11})(\sigma_{22} - \alpha_{22}) + P_{22}(\sigma_{22} - \alpha_{22})^2 = \sigma_0^2 \quad (5-12)$$

两种材料的参数 P_{12} , P_{22} 可分别通过各项异性系数及 Mises 屈服准则获得。

均采用非线性硬化准则对各项异性和各项同性材料进行有限元计算，提取背应力信息，根据上面的分析绘制屈服面演化图像如图 8 所示，其中两种材料的参数已在图中标明。

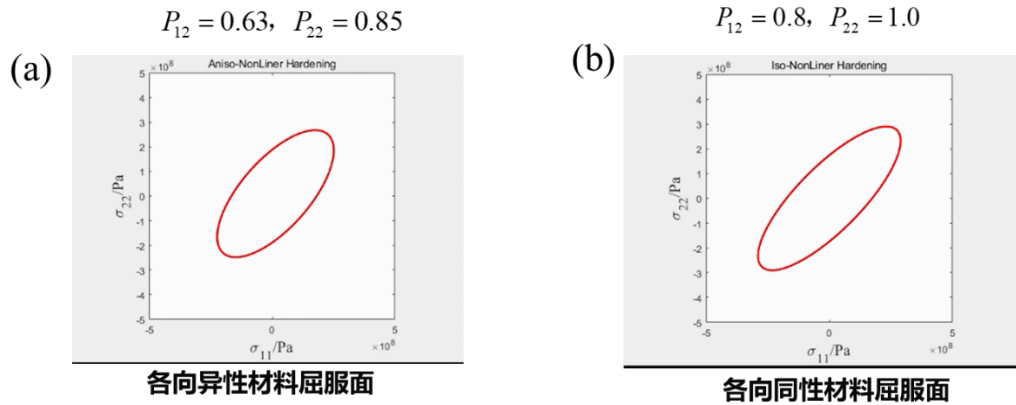


图 8 各向异性材料与各向同性材料的屈服面比较

可以看到各向异性材料与各向同性材料的屈服面形状不同，这是由 P_{12} , P_{22} 不同引起的。对于各项同性材料，屈服面在 π 平面 ($n = [1, 1, 1]$) 上是圆形，投影到 xy 平面上变成了椭圆形。

观察屈服面随变形的演化，发现屈服面大小和形状都不变，中心点向右上方移动，这与材料的硬化行为是对应的；随着应变的增大，屈服面的移动速度越来越慢，直到静止，这是由非线性随动硬化的特征决定的。

5.6 复杂工况模型验证与分析

前面通过简单位移加载对本文的各向异性非线性随动硬化模型进行了验证与分析，为了进一步探讨本文模型性质及验证所编写 UMAT 程序的正确性，本小节分别两种在复杂加载工况下利用 UMAT 子程序进行有限元仿真计算。

两种复杂工况分别为：(1) 循环加载-卸载；(2) 循环加载-反向加载。本小节计算模型的几何参数与力学参数均与第 4 章一致，考虑到卸载或反向加载时为了控制加载力的完全释放至 0，本小节采用力控制加载模式对单元进行双轴等幅拉伸。仿真总时长为 10s，由于材料屈服后其应力-应变曲线（或力-位移曲线）渐进平台区，在采用力加载时若载荷增量步

过大，则会导致 N-R 迭代收敛困难的问题，因此设置载荷增量步的上限至一个合适的较小值，并采用 Abaqus 的自适应步长设置模式。

首先讨论循环加-卸载工况。为了讨论本文模型的特性，同时对线性硬化模型进行了仿真计算，单元参数设置与本文模型基本一致，位移区别是令动态恢复项 $\gamma = 0$ 。下面给出了两种模型在循环加载-卸载工况下单元积分点上 x 方向的应力 S_{11} —应变 E_{11} 曲线。

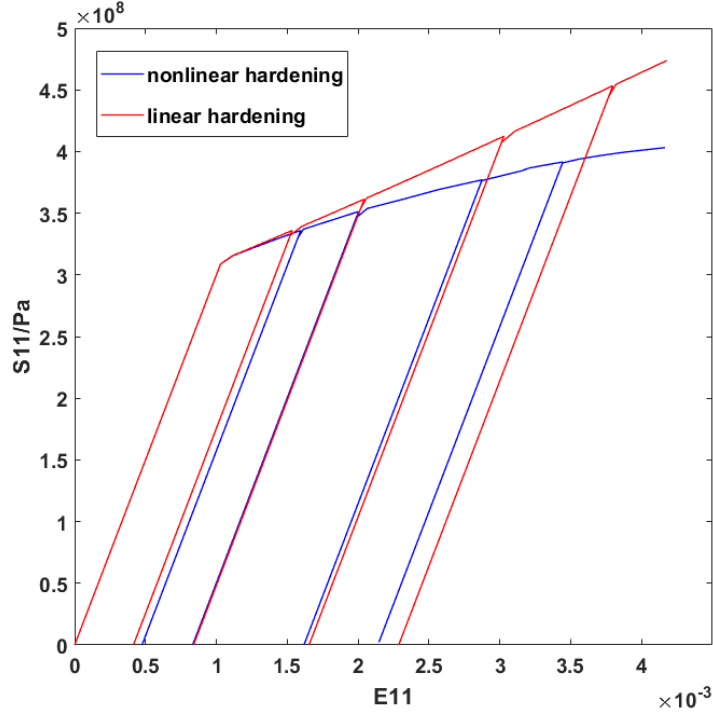


图 9 循环加-卸载工况下非线性硬化与线性硬化模型应力-应变曲线

可以看到，无论是线性硬化模型还是非线性硬化模型，均体现出了弹塑性性质及包辛格效应：

(1) 加载时材料首先表现为完全弹性性质，应力水平达到初始屈服点后应力-应变曲线切线斜率下降，材料表现出塑性软化性质。线性硬化模型中，材料进入塑性后应力-应变曲线仍基本呈线性关系。非线性硬化模型中，材料进入塑性后应力-应变曲线表现出明显的非线性关系，随着塑性流动的发生应力-应变曲线渐近平台区；

(2) 卸载时材料表现为弹性性质，应力-应变曲线斜率与初始加载弹性段斜率完全一致，外加载荷卸载至 0 时材料中仍有残余塑性应变；

(3) 材料进入塑性段，经历过卸载后再次加载，后继屈服强度得到提升。

下面来讨论循环加载-反向加载工况。为了避免循环加载时应力-应变曲线重合，每次重新加载时外载荷幅值都有一定提升。但这对于结果的分析并无影响。

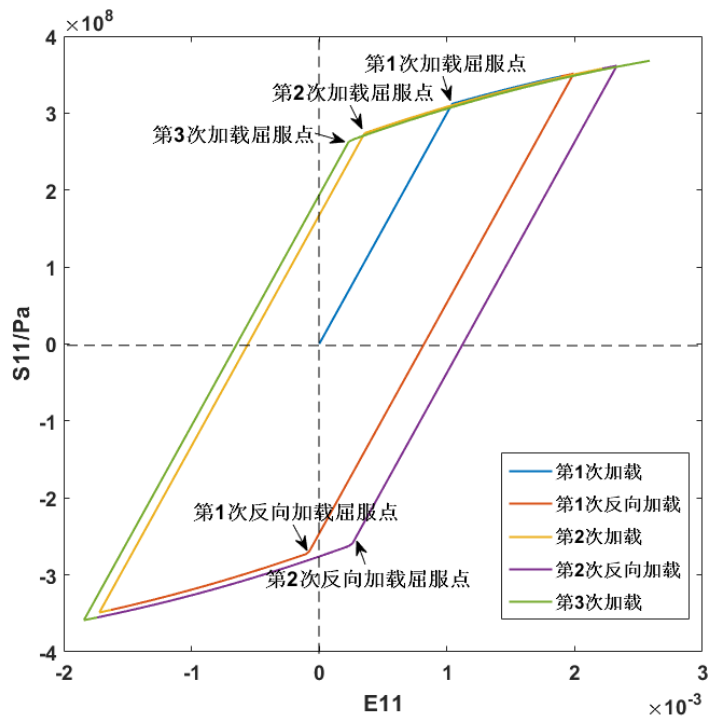


图 10 循环加载-反向加载工况下非线性硬化模型应力-应变曲线

从上图可以看到，材料在进入塑性段后发生弹性卸载，外载荷卸载至 0 后继续反向加载，对比第 1 次正向加载和第 1 次反向加载屈服点的应力水平可以明显发现，反向加载的屈服强度有所下降；对比第 1、2 和 3 次正向加载屈服点的应力水平可以看到，每次经过加载-反向加载循环后，正向屈服强度都有所下降。以上现象是由于本文采用的塑性模型为随动硬化模型，背应力与塑性应变紧密关联：

$$d\mathbf{a}_{ij} = \frac{2}{3} C d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p - \gamma \mathbf{a}_{ij} d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$$

可以看到第 1 次卸载应力至 0 时，参残余塑性应变非 0 且为正值，背应力也应为正值，此时屈服面中心在 $s_{11} - s_{22}$ 平面第一象限。在反向加载时随着载荷的增加屈服面逐渐向第三象限移动，但由于反向加载的初始状态屈服面中心在第一象限，从而导致反向加载时应力水平尚未达到正向加载屈服点时，材料就已经发送了屈服，导致了反向加载时屈服极限下降的现象，即包辛格效应。

第 6 章 全文总结与展望

本次大作业基于 Hill48-各向异性屈服准则及 A-F 非线性随动硬化模型，开发了本文的各向异性非线性随动硬化本构模型，并利用 Abaqus 的 UMAT 用户自定义子程序开发了相应程序，通过多种工况下的有限元仿真计算对本文弹塑性模型的合理性与特性及 UMAT 子程序的正确性进行了验证与讨论。

我们首先在计算固体力学课程的本构模型—弹塑性本构章节内容的基础上，对各种塑性本构模型进行了调研学习。在课程所学的各向同性-线性随动硬化弹塑性模型基础上，结合 Hill48 各向异性屈服准则及 A-F 非线性随动硬化模型，进一步对各向异性非线性硬化模型进行了理论分析。

在理论分析基础上，应用完全隐式应力更新算法，我们推导了弹塑性本构的迭代计算公式，建立了程序算法流程，开发了完整的 UMAT 子程序，并通过 Abaqus 的算例对其进行了数值实现。

通过算例，我们对本文模型的硬化过程、模型硬化参数的影响、材料取向的影响及复杂工况下的弹塑性过程与包辛格效应进行了分析讨论，并与其他简单模型(如理想弹塑性模型、线性硬化模型、各向同性屈服准则等)进行了对比，分析了各自优劣。

综上，在本次大作业中，我们通过对经典弹塑性模型理论的调研，对弹塑性理论框架有了进一步理解；通过开发相应 UMAT 子程序对本构理论的有限元实现有了更多经验；同时在 Abaqus 的计算中，对仿真计算中各计算参数的设置、对有限元隐式迭代算法有了更为实际的体验。

本次大作业针对本文所提出的各向异性非线性硬化弹塑性模型只进行了简单的定性讨论；材料参数的选取(如各向异性系数、硬化系数和动态恢复系数)在基本符合物理原则的基础上人为设定，有可能并不符合所研究材料的真实物理性质；且计算模型和加载方式均较为简单，这对讨论本文模型的特性是有效的，但在实际工程应用中是过于简单的。后续研究中，可以考虑将有限元仿真与实验相结合，实验结果可以对本文模型各参数的确定提供指导，从而建立真实工况下的有限元计算模型进行仿真，通过与实验结果的对比，进一步分析本文模型的可改进之处。

参考文献

- [1] 李光耀, 王琥, 杨旭静,等. 板料冲压成形工艺与模具设计制造中的若干前沿技术[J]. 机械工程学报, 2010(10):31-39.
- [2] Hill R . A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals[J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1948, 193(1033), 281–297.
- [3] Woodthorpe J , Pearce R . The anomalous behaviour of aluminium sheet under balanced biaxial tension[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1970, 12(4):341-347.
- [4] Hill R. Theoretical Plasticity of Textured Aggregates[J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1979, 85(1):179-191.
- [5] Hill R . Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet metals[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1990, 38(3):405-417.
- [6] F, Barlat, and, et al. Plastic behavior and stretchability of sheet metals. Part I: A yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions - ScienceDirect[J]. International Journal of Plasticity, 1989, 5(1):51-66.
- [7] Barlat F , Lege D J , Brem J C . A six-component yield function for anisotropic materials[J]. International Journal of Plasticity, 1991, 7(7):693-712.
- [8] Barlat F, Brem J C, Yoon J W, et al. Plane Stress Yield Function for Aluminum Alloy Sheets Part 1:Theory[J]. International Journal of Plasticity, 2003, 19(9):1297-1319.
- [9] Prager W . A New method of analyzing stresses and strains in work-hardening plastic solids[J]. Journal of Applied Mechanics, 1956, 23.
- [10] Ziegler, Hans. A Modification of Prager's Hardening Rule[J]. Q.appl.math, 1959, 17(1):55-65.
- [11] Armstrong P J, Frederick C O. A Mathematical Representation of The Uti-Axial Bauschinger Effect. Report RD/B/N 731, Central Electricity Generating Board, 1966.
- [12] Krzysztof, Chemiński, Patrizio, et al. The Armstrong–Frederick cyclic hardening plasticity model with Cosserat effects[J]. Journal of Differential Equations, 2014, 256(11):3497-3523.
- [13] Chaboche J L . Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity[J]. Inter. J. Plasticity, 1989, 5(3):247-302.
- [14] Chun B K , Jinn J T , Lee J K . Modeling the Bauschinger effect for sheet metals, part I: theory[J]. International Journal of Plasticity, 2002, 18(5):571-595.

- [15] Chung K , Lee M G , Kim D , et al. Spring-back evaluation of automotive sheets based on isotropic-kinematic hardening laws and non-quadratic anisotropic yield functions: Part I: Theory and formulation[J]. *International Journal of Plasticity*, 2005, 21(5):861-882.
- [16] 郑战光, 谢昌吉, 孙腾,等. 一种超细晶材料的混合硬化模型及其数值模拟[J]. *机械工程学报*, 2014, 50(020):77-83.
- [17] 余海燕, 王友. 一种基于 Chaboche 理论的混合硬化模型及其在回弹仿真中的应用[J]. *机械工程学报*, 2015(16):127-134.
- [18] 匡震邦, 郑颖人. 固体本构理论中的某些问题[C]// 中国力学学会现代力学与科技进步学术大会. 1997.
- [19] 陆明万, 张雄, 葛东云. 工程弹性力学与有限元法[M]. 清华大学出版社, 2005.
- [20] 陆璐, 王辅忠, 王照旭. 板料成形数值模拟有限元求解算法[J]. *材料导报*, 2011(03):111-115.
- [21] 王军祥, 姜谔男, 宋战平. 弹塑性 von Mises 本构模型的完全隐式数值积分算法研究[J]. *数值计算与计算机应用*, 2014, 35(2):103-116.
- [22] 王振普. 车身覆盖件伪逆成形方法中的应力更新算法研究及应用[D]. 大连理工大学, 2012.